

包容理论在导弹构件外形偏差评定中的应用

张锐, 黄成, 赵志敏

(91550 部队, 辽宁大连, 116023)

摘要: 阐明了导弹的机械构件在设计和加工过程中有严格的精度要求, 对于已经生产出来的构件, 需要对其进行外形偏差评定; 包容理论就是建立构件最小外包容模型, 评定其外形偏差的方法。该方法不但可以鉴定构件外形是否合格, 而且能够反映出加工工艺的误差。文中还应用包容理论对导弹的一例构件建立外形偏差的数学模型, 并进行了计算分析, 计算结果证明该例构件外形在偏差允许范围内。

关键词: 包容理论; 最小外包容; 外形偏差

中图分类号: TH 12; O 18

文献标识码: A

0 引言

导弹的研制和生产过程中, 对机械构件的外形有严格的精度要求, 因此, 外形偏差评定是质量评定中的重要环节。导弹构件的形状各异, 但大部分是由柱体、锥体、球体、台体等基本几何体组成。因此, 构件的外形偏差评定是多重几何体组合评定的问题。这就要求对构件表面的测量数据进行整合处理, 若单独对每个曲面进行偏差评定则达不到目的, 因为各个回转面的中心轴不一定重合^[1]。因此, 对各种构件外形偏差评定应建立如下的数学模型:

(1) 用组成构件的某一几何体表面的实测点列来构建这个几何体的最小外包容体, 并以此几何体的中心轴作为构件最小外包容体的轴线;

(2) 组成构件几何体的各个回转面参照构件最小外包容体的轴线来建立相应的数学模型。

本文以圆柱、圆台和球缺的组合体为例来建立相应的数学模型, 如图 1。

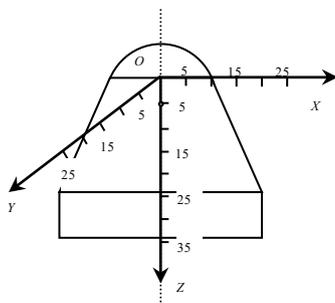


图 1 圆柱、圆台和球缺的组合体

1 外形偏差数学模型的建立

引入最小外包容圆柱的定义: 对于已知点列 $\{P_i\}$ ($i=1\sim n$), 存在圆柱 H , 使得点列中的所有点或在其表面, 或在其内部, 且至少有一个点在其底面上, 则称圆柱 H 外包容了点列 $\{P_i\}$, 其中 H 中体积最小者被称为点列 $\{P_i\}$ 的最小外包容圆柱, 如图 2。其他几何体的外包容定义类似。下面我们来深入探讨最小外包容体的数学模型。

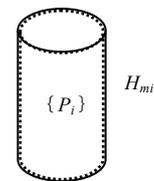


图 2 最小外包容圆柱

1.1 构建圆柱的最小外包容模型

已知 $P_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1\sim n$) 为圆柱表面的实测点列, 应用最小二乘法分别计算出位于 XZ 平面和 YZ 平面且到 $\{P_k\}$ 中各点距离平方和最小的直线分别为

$$z = \frac{x - a_0}{A_0}, \quad (1)$$

$$z = \frac{y - b_0}{B_0}. \quad (2)$$

以直线(1)和(2)为初始轴线进行求解。 $\{P_k\}$ 在 XZ 和 YZ 两平面上的投影点分别为 $P_{k1}(x_{k1}, 0, z_{k1})$, $P_{k2}(0, y_{k2}, z_{k2})$, 以 XZ 平面为例, 先计

算 $\{P_{k1}\}$ 与直线(1)的残差

$$\Delta z_{k1} = z_{k1} - \frac{x-a_0}{A_0} \quad (3)$$

选择 $\{\Delta z_{k1}\}$ 中的最大值和最小值, 记对应点为 P'_{11} 和 P'_{21} , 分别过这两点做平行直线(1)的直线 L_1 和 L_2 , L_1 和 L_2 不一定是点列 $\{P_k\}$ 的最小外包容直线, 因此需要利用 L_1 与 L_2 的旋转在斜线区域内寻求第三个控制点来修正^[2], 如图 3 所示。

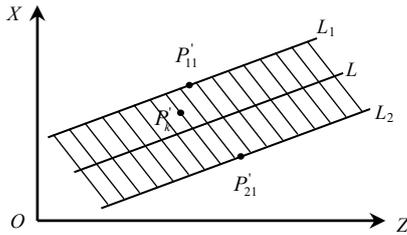


图 3 第三控制点所在的斜线区域

令 L_1 和 L 斜线区域内一点 P'_k 到 L 距离为 v_k , 到 P'_{11} 距离为 e_k , 令 L_1 与 L 距离为 s , 如图 4 所示。

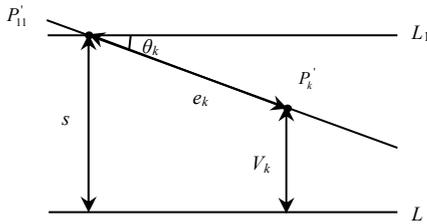


图 4 旋转角度示意图

当 L_1 以 P'_{11} 为定点旋转到 P'_k 点时, 旋转角度为 θ_k , 则

$$\theta_k = \arcsin \frac{s-v_k}{e_k} \quad (4)$$

同理可得 L_2 以 P'_{21} 为定点所旋转的角度 $\bar{\theta}_k$, 此时令

$$\theta = \min\{\theta_k, \bar{\theta}_k\} \quad (5)$$

则 θ 对应点即为第三个控制点, 不妨设第三个控制点与 P'_{11} 位于直线(1)的同侧, 记为 P'_{12} 。

过点 P'_{11} 和 P'_{12} 的直线记为 L'_1 , 过点 P'_{21} 且平行 L'_1 的直线记为 L'_2 , 则与直线 L'_1 和 L'_2 平行且距离相等的直线为

$$z = \frac{x-a}{A} \quad (6)$$

同理可得在 YZ 平面上的此类直线

$$z = \frac{y-b}{B} \quad (7)$$

因此得到圆柱轴线的参考轴线

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = z \quad (8)$$

我们不妨把逼近圆柱轴线的直线(8)作为构件最小外包容体的中心轴。

1.2 构建圆台的最小外包容模型

因为圆台和圆柱的轴线逼近, 不妨把圆台的轴线定义为

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = z \quad (8')$$

已知 $\{P_i\}$ ($i=1\sim n$) 为圆台表面实测点列, 先计算 $\{P_i\}$ ($i=1\sim n$) 中各点到直线(8')的距离

$$d_i = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i - a & y_i - b & z_i \\ A & B & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \quad (9)$$

过 $\{P_i\}$ 作直线(8')的垂线, 设对应的垂足为 $\bar{P}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, 则线段 $P_i\bar{P}_i$ 垂直于直线(8'), 于是有

$$\begin{cases} A(x_i - \bar{x}_i) + B(y_i - \bar{y}_i) + z_i - \bar{z}_i = 0 \\ \frac{\bar{x}_i - a}{A} = \frac{\bar{y}_i - b}{B} = \bar{z}_i \end{cases} \quad (10)$$

由上述方程组可求出垂足坐标, 取 \bar{z}_i 中最小值记为 \bar{z}_0 , $\bar{z}_0 = \min\{\bar{z}_i\}$, \bar{z}_0 对应点记为 $\bar{P}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$, $\bar{z}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ 中各点到 \bar{z}_0 点的距离分别为

$$d_i = \sqrt{(\bar{x}_i - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2 + (\bar{z}_i - \bar{z}_0)^2} \quad (11)$$

我们可用圆台对应的圆锥来解决问题。为求取圆锥顶角, 以 $\bar{P}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ 为坐标原点, 以 \bar{d}_i 值为 \bar{x} 坐标、 d_i 值为 \bar{y} 坐标, 建立直角坐标系 $\sigma = [\bar{P}_0, \bar{x}, \bar{y}]$, 于是得到点列 $\bar{P}_i^*(\bar{d}_i, d_i)$, 包容点列 \bar{P}_i^* 的直线方程 L 即可得出, 如图 5 所示。

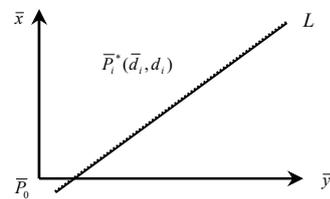


图 5 包容点列的直线方程

设直线 L 与 \bar{x} 轴交点为 $\bar{P}_0^*(\bar{d}_0, 0)$, 则 \bar{P}_0^* 在原坐标系 $\sigma = [x, y, z]$ 下坐标 (x_0^*, y_0^*, z_0^*) 当满足

$$\begin{cases} \bar{d}_0 = \sqrt{(x_0^* - \bar{x}_0)^2 + (y_0^* - \bar{y}_0)^2 + (z_0^* - \bar{z}_0)^2} \\ \frac{x_0^* - \bar{x}_0}{A} = \frac{y_0^* - \bar{y}_0}{B} = z_0^* - \bar{z}_0 \end{cases} \quad (12)$$

于是据式(12)可求出 (x_0^*, y_0^*, z_0^*) 。连接 $\bar{P}_0^*P_i$,

$\bar{P}_0^*P_i$ 与直线(8')必相交，其夹角为

$$\alpha_i = \arccos \frac{A(x_i - x_0^*) + B(y_i - y_0^*) + z_i - z_0^*}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \sqrt{(x_i - x_0^*)^2 + (y_i - y_0^*)^2 + (z_i - z_0^*)^2}} \quad (13)$$

不妨取 α_i 中最小者前 6 个，记为 $P_k (k=1\sim 6)$ ，于是有

$$\alpha = \arccos \frac{A(x_k - x_0^*) + B(y_k - y_0^*) + z_k - z_0^*}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \sqrt{(x_k - x_0^*)^2 + (y_k - y_0^*)^2 + (z_k - z_0^*)^2}} \quad (14)$$

连续取 $k=1\sim 6$ ，当满足约束条件 $\alpha \leq \alpha_i$ 时的 2α 值即为圆锥的顶角。

1.3 构建球头的最小外包容模型

因为球缺的球心位于构件的轴线(8)上，因此可建立如下的数学模型。^[3]

已知 $\{P_j\} (j=1\sim n)$ 为球头表面的实测点列， $\{P_j\}$ 中各点到构件轴线(8)的距离为

$$d_j = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_j - a & y_j - b & z_j \\ A & B & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \quad (15)$$

由 $\{P_j\}$ 向轴线 (8) 作垂线，设垂足为 $\bar{P}_j(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ ，则 $\{\bar{P}_j\}$ 满足轴线方程，于是有

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}_j - a}{A} = \frac{\bar{y}_j - b}{B} = \bar{z}_j \\ A(\bar{x}_j - x_j) + B(\bar{y}_j - y_j) + \bar{z}_j - z_j = 0 \end{cases} \quad (16)$$

由上式解出垂足坐标 $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ ，取 \bar{z}_j 中最小值 \bar{z}_p ，则 \bar{z}_p 对应式为 $\bar{z}_p = \min\{\bar{z}_j\}$ ，对应点为 $\bar{P}_p(\bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{z}_p)$ ， $\bar{P}_j(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ 中各点到 \bar{P}_p 点的距离为

$$\bar{d}_j = \sqrt{(\bar{x}_j - \bar{x}_p)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_p)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_p)^2} \quad (17)$$

以 \bar{P}_p 为临时坐标原点，以 \bar{d}_j 为横坐标， d_j 为纵坐标建立直角坐标 $\bar{\sigma} = [\bar{P}_p, \bar{d}_j, d_j]$ ，如图 6 所示。则该问题就转化为求取点列 $\bar{P}_p^*(\bar{d}_j, d_j)$ 的最小外包容圆弧 S 的球心和半径。设 S_1, S_2, S_3 为圆弧 S 上任意

3 点，分别作 S_1, S_2 和 S_2, S_3 连线的中垂线，则中垂线交点 (\bar{d}_0, d_0) 应满足

$$(\bar{d}_{S_n} - \bar{d}_0)^2 + (d_{S_n} - d_0)^2 = R^2 \quad (n=1,2,3) \quad (18)$$

此时，求出 \bar{P}_p^* 中各点到点 (\bar{d}_0, d_0) 的距离 \bar{S}_s^*

$$\bar{S}_s^* = \sqrt{(\bar{d}_s - \bar{d}_0)^2 + (d_s - d_0)^2} \quad (19)$$

显然，当 \bar{S}_s^* 满足约束条件 $\bar{S}_s^* \geq R$ 时， R 就是最小外包容球的半径。

此时 (\bar{d}_0, d_0) 为圆弧 S 的圆心，最小外包容球的球心为 $(\bar{d}_0, d_0, R \sin \alpha)$ 。

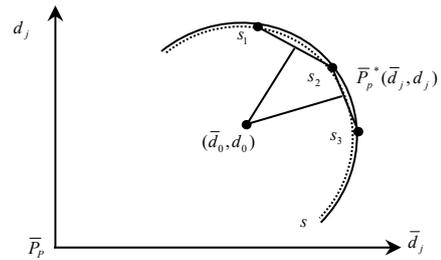


图 6 点列的包容圆弧

2 偏差评定计算

用光测法^[4]对该构件的外表面进行测量，测量点列坐标见表 1。该构件的外形设计理论方程见表 2。用最小外包容评定方法进行计算，结果见表 3。由表 3 可见，该构件外形满足设计要求。

表 1 构件表面实测点列坐标 (单位: cm)

圆台表面数据点			球缺表面数据点			圆柱表面数据点		
x	y	z	x	y	z	x	y	z
15.9462	0.2989	1.4057	0.0189	-0.1516	-15.9872	14.7862	-14.5488	11.8235
15.0413	5.1982	1.9556	1.2705	0.2835	-15.9271	13.0413	-13.1794	11.7145
12.6752	9.5667	2.5004	2.1252	1.4451	-15.7507	15.6733	-14.3453	11.2575
9.0867	12.9818	3.0357	2.2738	3.0861	-15.4598	13.7521	-12.0255	10.8488
4.6328	15.1157	3.5581	1.5365	4.8459	-15.0617	11.8763	-8.6129	10.7577
-0.2474	15.7683	4.0656	-0.0991	6.3134	-14.5628	-15.4901	-11.7582	10.6799
-5.0756	14.8842	4.5573	-2.4724	7.0966	-13.9702	-14.6290	14.8742	10.5289
-9.3808	12.5586	5.0343	-5.2669	6.8936	-13.2917	-12.3328	12.5683	10.3573
-12.7461	9.0272	5.4985	-8.0583	5.5486	-12.5319	-13.5643	14.4687	9.7235
-14.8485	4.6416	5.9546	-10.3785	3.0862	-11.6976	-13.0413	12.1794	9.6144
-15.4901	-0.1652	6.4057	-11.7919	-0.2826	-10.7923	-15.6733	12.3443	9.5240
-14.6161	-4.9213	6.8571	-11.9661	-4.1837	-9.8183	-13.7521	11.1247	9.3481

圆台表面数据点			球缺表面数据点			圆柱表面数据点		
x	y	z	x	y	z	x	y	z
-8.8358	-12.4781	7.7789	0.2318	-15.1906	-5.2824	-15.4901	11.7572	9.2299
-4.5078	-14.5488	8.2575	5.0212	-14.7213	-4.0066	14.6290	-13.7715	8.7789
0.2362	-15.1794	8.7498	9.4745	-12.6552	-2.6887	12.5688	-14.5365	8.6573
4.9311	-14.3161	9.2577	13.0458	-9.1916	-1.3385	15.1046	-11.4520	8.5799
9.1193	-12.0511	9.7799	15.2942	-4.7168	0.0309	12.6290	-13.1256	8.4586
12.3952	-8.6129	10.3145	-8.1049	-11.5936	-7.6731	12.2258	-12.4258	8.3673
14.4444	-4.3432	10.8573	-4.3179	-14.0754	-6.5065	9.3328	-11.5683	7.9571

表2 构件外形设计理论方程 (单位: cm)

构件部段	理论值	允许偏差
圆柱、圆台	轴线方程: $x = y = 0$	$ \Delta A , \Delta B < 10^{-2}$ $ \Delta a , \Delta b < 10^{-2}$
	允许偏差方程: $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = z$	
	顶角: $2\alpha = 18 + k$	$ k < 5 \times 10^{-3}$
球缺	球心坐标 (0, 0, 4.9)	$ d , e < 5 \times 10^{-3}$ $ f < 1 \times 10^{-2}$
	球心坐标偏差参数 (d, e, 4.9+f)	
	半径: $R = 16$	$ \Delta R < 10^{-3}$

表3 构件外形偏差评定结果 (单位: cm)

构件部段	计算结果
圆柱、圆台	轴线方程: $\frac{x-0.0091}{0.00018} = \frac{y-0.0109}{0.00102} = z$
	顶角: $2\alpha = 17.9953$
球缺	球心坐标 (0.0039, 0.0016, 4.8948)
	半径 $R = 16.0003$

参考文献:

- [1] 陈朝光, 唐余勇, 吴鸿业. 微分几何及其在机械工程中的应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1998
- [2] 卢杰特, 王永青, 范金. 火箭喷管等倾角螺旋槽铣削加工中刀具的干涉分析[J]. 大连理工大学学报, 2001, 21(5):18-23
- [3] 陈朝光, 唐余勇. 包容球体及相关问题的研究 (APSI'97)[A]. 北京: 中国计量出版社, 1997(8):197-201
- [4] 王树国. 机械工程中几何仿真、建模与求解[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993

3 结束语

本文系统地介绍了构件外形偏差评定模型的建立和计算方法, 并引用构件表面的实测点列对模型进行了计算和评定。此种外形偏差评定方法不但适用于轴对称几何体构件, 也可以类似地推广到其他非轴对称几何体构件, 是构件外形偏差评定较为实用的方法。

Application of the theories of enveloping in missile's mechanical parts shape deviation assessing

ZHANG Rui, WANG Cheng, ZHAO Zhimin

(The 91550th Unit of PLA, Dalian, Liaoning, 116023)

Abstract: The guided missile's mechanical parts have the strict accuracy request in design and machining process. For these already produced out, it is necessary to assess the shape deviation of them. The theories of enveloping are to build up the minimum external enveloping model of the mechanical parts, assessing the deviation of its shape. The method not only can appraise whether a shape of the mechanical parts are qualified or not, but also can reflect the error margin that process the craft. In this paper, with the theories of enveloping, a mathematical model of the shape deviation assessing is established to an example of guided missile's mechanical part, and the calculation analysis is carried on. The result proves that the shape of the parts are within the scope of the deviation allow.

Key words: the theories of enveloping; the minimum external enveloping; shape deviation