基于案例学习的 Lanchester 方程在海战中的应用

潘长鹏，严建钢，吴福初

（海军航空工程学院指挥系，山东烟台，264001）

摘　要：分析了传统的 Lanchester 方程在分析作战动态过程中，求取兵力损耗率系数时有一定的局限性。介绍了以 Lanchester 平方律的作战过程为研究对象，通过作战序列引理的介绍，建立了基于案例学习的 Lanchester 方程定理，提出的一种新的兵力损耗率系数的求解理论与方法，实例证明该算法是有效的。

关键词：基于案例学习；Lanchester 方程；兵力损耗率系数

中图分类号：E 917　　**文献标识码：**A

0 引言

目前广泛运用于作战模拟中的 Lanchester 方程是军事运筹学的重要组成部分。该方程作为分析作战动态过程的微分方程，优点是将兵力损耗与对方的兵力和兵器效能直接联系起来，各因素对作战效能的影响相对直观且便于分析，同时在计算时间上有优势。缺点是能直接在数学模型中考虑的因素较少，需要在实践中不断丰富其内容。

应用该理论研究实际问题时，要想得到与作战实际较为接近的兵力毁伤推演过程，作战双方的兵力损耗率系数的取值至关重要。目前研究兵力损耗率系数的数学模型很多[1-3]，但就研究方法而言，归根到底都是采用因素分析法，即以影响兵力损耗率系数的一种或几种主要因素为自变量，建立起兵力损耗率系数的解析模型。这种思路相当于把兵力损耗率系数这一困难的取值转换成了一个或几个新的变量的取值问题，因此，因素分析法目前尚未最终成功解决兵力损耗率系数的计算。本文提出一种新的基于案例学习（Case-Based Study，CBS）的兵力损耗率系数的求解理论与方法。

1 基于案例学习的 Lanchester 方程的基本思想

1.1 作战序列引理的导出

就符合 Lanchester 平方律的作战过程而言，t 时刻红（蓝）方兵力损耗率是其兵力损耗率系数与蓝（红）方 t 时刻瞬时兵力之积[4]。定性地讲，兵力损耗率系数是一个具体作战背景下的概念。这个具体的作战背景包括具体的历史时期，具体的交战对象，交战双方具体的武器装备，具体的作战样式等等。而且，作战双方的兵力损耗率系数是相互依赖、互为影响的。

一般来讲，对于同一场战争中交战的两支军队，由于各自的军事理论、武器装备技术、作战指挥风格等变化不大，因而从整体和宏观上分析，如果作战地域中各区域的作战环境基本相似，作战类型（如两次作战均为红方进攻，蓝方防御）、作战样式基本相同（例如两次作战均为红方预有准备的空中突击，蓝方为护航作战），交战双方单武器系统的单发作战效能虽然受随机因素的影响而有所波动，但在整个作战过程中，其多发平均作战效能仍具稳定性。这种稳定性就决定了在两次极为相似的作战过程中，红蓝双方各方的兵力损耗率系数波动不大。这里“波动不大”的准确含义是：即使有所波动，那么波动的振幅也是小到可以忽略不计的程度。

那么我们完全可以认为这两支军队在同一场战役（甚至战争）的各个不同的阶段，可以由作战第一阶段的作战过程及作战结果分析而得到的兵力损耗率系数，用来对作战第二阶段及尔后阶段的作战过程与作战结果进行推演预测，从而为指挥员后期的作战指挥和作战决策提供基本依据[5]。这就是本文研究兵力损耗率系数的战例求解理论与方法的意义之所在。

收稿日期：2005-12-10

作者简介：潘长鹏（1977–），男，讲师，博士生；严建刚（1958–），男，教授，博导，博士.

综上所述，为了阐述基于案例学习的兵力损耗率系数求解理论基本思想及其应用范围，这里提出如下作战序列引理：

引理 对于时间间隔不大，作战环境变化不大，交战对象、武器装备、作战类型及其作战样式等基本相同且相对独立的较为完整的 n 个（$n>1$）作战阶段所组成的作战序列 f_1，f_2，f_3，…，f_n，第 k 作战阶段中红蓝双方各自的兵力损耗率系数在第 $k+i$ 作战阶段中不会发生大的变化，第 k 作战阶段中的损耗规律仍近似地符合第 $k+i$ 作战阶段的损耗规律（$1\le k<n$，$2\le k+i\le n$）。

这里所说的作战阶段序列可以是由诸多战斗所组成的战斗序列，也可以是战役序列[6]；作战环境包括地形、气候和能见度等自然因素，以及战场环境与社会环境。

1.2 基于案例学习的兰彻斯特方程定理的提出

设一场战役（战争）第一作战阶段已经结束。显然该阶段红、蓝双方的初始兵力 R_0、B_0 及作战持续时间 T、作战结束时红蓝双方的剩余兵力 $R(T)$、$B(T)$ 均可以统计得出。即 R_0、B_0、T、$R(T)$、$B(T)$ 这 5 个量可被认为是已知量。由 Lanchester 平方率

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha B(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}=-\beta R(t)\\ R(t)_{t=0}=R_0\\ B(t)_{t=0}=B_0\end{cases}, \tag{1}$$

可得

$$\alpha(B_0^2-B_{(T)}^2)=\beta(R_0^2-R_{(T)}^2), \tag{2}$$

$$B(T)=\frac{1}{2}\left[B_0\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)-\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}R_0\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)\right], \tag{3}$$

$$R(T)=\frac{1}{2}\left[R_0\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}B_0\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)\right], \tag{4}$$

其中，α、β 均为常量，它们的军事意义是：β 为第一阶段作战中红方每一个剩存武器系统在单位时间内平均毁伤蓝方的武器系统数，α 为蓝方每一个剩存武器系统在单位时间内平均毁伤红方的武器系统数[5]。

定理 设 f_1，f_2 是严格符合作战序列引理条件的相对独立的且较为完整的两个作战过程（战役或战斗），即这两个作战过程的作战环境、交战对象、武器装备、作战类型和作战样式等都严格相同，如果第二次作战红蓝双方所投入的初始兵力都分别是己方第一次投入的初始兵力的 k 倍，那么，如下命题成立：[7]

A．这两次作战的胜负结果相同；

B．这两次作战的持续时间相等（从作战开始到其中一方兵力为 0 止，定义为作战持续时间）；

C．第二次作战结束时，胜方的剩余兵力是己方第一次作战剩余兵力的 k 倍。

证明：设第一次作战红方投入初始兵力为 R_{01}、蓝方投入初始兵力为 B_{01}，作战持续时间为 T_1、作战结束时红方剩存兵力为 $R(T_1)$、蓝方剩存兵力为 $B(T_1)$。第二次作战中红方初始兵力为 $R_{02}=kR_{01}$、蓝方初始兵力为 $B_{02}=kB_{01}$。

（a）由于 f_1 与 f_2 两个作战过程的作战环境、交战对象、武器装备、作战类型和作战样式等都相同。据引理，作战过程 f_1 中的 α、β 与作战过程 f_2 中的 α、β 分别相等，如第一次作战红方取胜，由 Lanchester 平方律胜负判别准则[4]，有 $\beta R_{01}^2>\alpha B_{01}^2$，$\beta k^2R_{01}^2>\alpha k^2B_{01}^2$ 或 $\beta(kR_{01})^2>\alpha(kB_{01})^2$，则 $\beta R_{02}^2>\alpha B_{02}^2$，故第二次作战仍为红方取胜。

同理可证，如果第一次作战蓝方取胜，则第二次作战仍为蓝方取胜。

（b）以交战其中一方兵力降至 0 为作战结束时刻，那么由式(2)~(4)，这两次作战持续时间 T_1 和 T_2 故相等，即

$$T_1=T_2=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{\alpha}B_{02}+\sqrt{\beta}R_{02}}{\sqrt{\alpha}B_{02}-\sqrt{\beta}R_{02}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{\alpha}kB_{01}+\sqrt{\beta}kR_{01}}{\sqrt{\alpha}kB_{01}-\sqrt{\beta}kR_{01}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{\alpha}B_{01}+\sqrt{\beta}R_{01}}{\sqrt{\alpha}B_{01}-\sqrt{\beta}R_{01}}\right|。$$

（c）如果第一次作战红方获胜，则 $B(T_1)=0$，由定理已证命题 A 知，第二次作战仍为红方获胜。因而，$B(T_2)=0$，自然有 $B(T_2)=kB(T_1)$。而对于红方有：

$$R(T_1)=\frac{1}{2}\left[R_{01}\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_1}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_1}\right)-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}B_{01}\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_1}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_1}\right)\right],$$

$R(T_2)=$

$$\frac{1}{2}\left[R_{02}\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_2}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_2}\right)-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}B_{02}\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_2}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_2}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[kR_{01}\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_1}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_1}\right)-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}kB_{01}\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T_1}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T_1}\right)\right]=$$

$kR(T_1)$ 。

即红方第二次作战剩余兵力是第一次作战剩余兵力的 k 倍。如果第一次作战蓝方获胜，同理可证命题 C 为真。

2 兵力损耗率系数的求解方法

由于式(1)表示红、蓝双方的兵力损耗率，因此等号右边的 α 、β 又可分别称为红、蓝双方的兵力损耗率系数。所谓“基于案例学习的兵力损耗率系数求解法”，就是要通过战例计算出 α 、β 。[7]

事实上，令 $\sqrt{\alpha/\beta}=n$ ，由式(2)知

$$n=\sqrt{\frac{R_0^2-R_{(T)}^2}{B_0^2-B_{(T)}^2}} \tag{5}$$

为可确定的常量。令 $e^{\sqrt{\alpha\beta}T}=m$ ，联立(3)、(4)两式可得关于 m 的一元二次方程组。它有一正一负两个不等的根（求解过程略）。它的符合题意的解（其值为负数的根已舍去）为：

$$m=\frac{R_{(T)}B_0-B_{(T)}R_0}{R_0^2/n-nB_0^2}+\sqrt{\left[\frac{R_{(T)}B_0-B_{(T)}R_0}{R_0^2/n-nB_0^2}\right]^2+1}\ , \tag{6}$$

联立 $\sqrt{\alpha/\beta}=n$ ， $e^{\sqrt{\alpha\beta}T}=m$ ，可得

$$\alpha=\frac{n\ln m}{T}\ ,\quad \beta=\frac{\ln m}{nT}\ ,$$

其中， n 、m 分别由式(5)、(6)确定； T 为第一阶段作战持续时间。

以上 α 、β 就是根据作战阶段序列中的第一阶段交战双方的初始兵力、剩存兵力及其作战持续时间，所求得在作战第一阶段红蓝双方各自的兵力损耗系数。依据已求得的红蓝双方第一阶段作战的兵力损耗系数，可以预测作战第二阶段及尔后阶段的作战持续时间，双方剩存兵力等作战结果[7]。

3 应用算例

蓝军 B_1 护卫舰编队（2 艘护卫舰）对某海域的 X_1 航线进行护航作战，红方 R_1 突击编队（4 艘护卫舰）奉命消灭该敌。战斗于 D 时刻打响，于 D+10 小时，红方以损失 2 艘军舰的代价全歼该敌。五日后，红方 R_2 突击编队（8 艘护卫舰）奉命完成该海域 X_2 航线的蓝军 B_2 护卫舰编队（4 艘护卫舰）打击准备，并于 D' 时刻对该敌发起攻击。

试计算第一次战斗红蓝双方的兵力损耗率系数，并预测第二次作战的打击效果及持续时间，另整个作战海域的各航线地理要素气象水文条件基本相近。

分析：红蓝双方间隔 5 天，相继进行了两次战斗。两次战斗皆是蓝方护航作战，红方突击作战，且战斗都是在同一海域进行。这样的两次战斗符合所建立定理的条件。因此，第一次战斗中红蓝双方的战斗损耗率系数 α 、β 仍然极为近似地适合于第二次战斗的作战毁伤过程。

对于第一次战斗，已知 $B_{01}=2$ ， $R_{01}=4$ ， $T=10$ ， $R(T)=4-2=2$ ， $B(T)=0$ 。

$$n=\sqrt{\frac{R_{01}^2-R_{(T)}^2}{B_{01}^2-B_{(T)}^2}}=2\ ;$$

$$m=\frac{R_{(T)}B_{01}-B_{(T)}R_{01}}{R_{01}^2/n-nB_{01}^2}+\sqrt{\left[\frac{R_{(T)}B_{01}-B_{(T)}R_{01}}{R_{01}^2/n-nB_{01}^2}\right]^2+1}=3\ 。$$

所以，

$$\alpha=\frac{n\ln m}{T}=0.2197\ （艘/小时）;$$

$$\beta=\frac{\ln m}{nT}=0.0549\ （艘/小时）。$$

对于第二次战斗，已知 $B_{02}=4$ ， $R_{02}=8$ ，根据本文所建的定理，近似地认为在第二次战斗过程中 $\alpha=0.2197$ （艘/小时）， $\beta=0.0549$ （艘/小时）。因为 $\beta R_0^2>\alpha B_0^2$ ，所以红方获胜，其作战持续时间为：

$$T_2=\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{\alpha}B_{02}+\sqrt{\beta}R_{02}}{\sqrt{\alpha}B_{02}-\sqrt{\beta}R_{02}}\right|=10.0033（小时）。$$

战斗结束时，蓝方剩余兵力为 $B(T_2)=0$ ，红方剩余兵力为：

$R(T_2)=$

$$\frac{1}{2}\left[R_{02}\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}-e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}B_{02}\right)\left(e^{\sqrt{\alpha\beta}T}+e^{-\sqrt{\alpha\beta}T}\right)\right]=$$

3.826（艘）。

结果与定理中的分析一致，即

$$\frac{R_{02}}{R_{01}}=\frac{B_{02}}{B_{01}}=2\approx\frac{R(T_2)}{R(T_1)}\ 。$$

具体来讲：

（1）胜负结果基本相同（红胜蓝负）；

（2）两次作战的持续时间基本相等（ $T_1=10$ ，

$T_2 = 10.0033$ ）；

（3）第二次作战结束时，胜方（红方）剩余兵力基本上是第一次作战结束时剩余兵力的 2 倍。

4 结束语

本文提出一种基于案例学习的 Lanchester 方程，其中心思想是：如果两个作战过程的时间间隔不大，交战对象、武器装备、作战类型和作战样式都相同，作战环境和作战条件都基本相近，那么兵力损耗率系数 α 、β 的求取可以通过案例学习的方法获得。这种方法是从作战结果研究兵力损耗率系数的一种直接方法，所得 α 、β 是作战过程中所有随机因素综合作用的结果。所以，不仅解决 α 、β 取值计算问题，而且其结果与实战过程更为逼近。

参考文献：

[1] 张野鹏. 作战模拟基础[M]. 北京：解放军出版社, 1994:225-237

[2] 王可定. 作战模拟理论与方法[M]. 长沙：国防科技大学出版社, 1999:121-150

[3] 潘长鹏, 严建钢, 唐金国. 模型库管理系统理论在海军航空兵作战仿真系统中的应用[J]. 海军航空工程学院学报, 2001,16(4):487-490

[4] 陈建华. 舰艇作战模拟理论与实践[M]. 北京：国防工业出版社, 2002:18-29

[5] 周良泽. 军事运筹学[M]. 蚌埠：蚌埠坦克学院, 1993:120-130

[6] 韩松臣. 导弹武器系统效能分析的随机理论方法[M]. 北京：国防工业出版社, 2001:28-36

[7] 戴理晟, 周良泽, 沈汉江. “兰氏”平方率作战毁伤过程兵力损耗率系数求解理论[J]. 射击学报, 2001(3):6-8

Application of case-based study Lanchester function in sea combat

PAN Changpeng，YAN Jiangang，WU Fuchu

（Department of Command，NAEI，Yantai，Shandong，264001）

Abstract: The traditional Lanchester function applied in the course of dynamics operation has drawbacks due to limitation of establishing power loss ratio. Lanchester square law is analyzed, case-based study Lanchester theory is founded, a novel theory of power loss ratio is exposed, the effectiveness of proposed algorithm is showed by the example.

Key words: case-based study; Lanchester function; power loss ratio

（上接第 480 页）

Evaluating the operational efficiency of ASM systems by fuzzy theory

WANG Hao[1]，JI Yongqing[2]，WANG Yongjie[3]，MA Liang[1]

（1．Graduate Students’ Brigade of NAEI；2．Department of Command，NAEI，Yantai，Shandong，264001；
3．Naval Submarine Academy，Qingdao，Shandong，266071）

Abstract: In this paper, the deficiency in evaluating the operational efficiency of ASM systems is discussed, and the fuzzy method to evaluate the operational efficiency of ASM systems is put forward. Firstly, the fuzzy model is established, including confirming the congregate of factor index and the evaluation process of the method-windage distance comparatively minimum. Secondly, the fuzzy method is used to evaluate the operational efficiency of five abroad type ASM systems and analysis the evaluation result. At last, the conclusion is acquired through analyzing the fuzzy model and evaluation result.

Key words: operational efficiency; anti-ship missile; fuzzy evaluating; minimum distance method