

文章编号:1673-1522(2019)02-0257-04

DOI: 10.7682/j.issn.1673-1522.2019.02.014

分数阶Cohen-Grossberg神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性

刘孝磊¹, 顾丽娟¹, 刘晓燕¹, 郭立娜²

(1. 海军航空大学, 山东 烟台 264001; 2. 南山学院, 山东 烟台 265706)

摘要:在整数阶Cohen-Grossberg神经网络与分数阶理论及分数阶神经网络的基础上,提出了分数阶Cohen-Grossberg神经网络。为了研究该类型神经网络,引入 Mittag-Leffler 函数并利用 Mittag-Leffler 函数及分数阶导数的相关性质,进而通过构造 Lyapunov 函数的方法,研究了分数阶Cohen-Grossberg神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性,并最终给出了相应的充分性条件。最后,通过实例仿真验证了结论的正确性。

关键词:分数阶; CG神经网络; Mittag-Leffler 稳定

中图分类号:O175

文献标志码:A

自1983年, Cohen和Grossberg提出了一种广义的整数阶神经网络模型^[1]

$$\frac{dx_i}{dt} = -a_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n c_{ij} d_j(x_j) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

以来,对该类模型的研究就日益深入,并逐步推广到时滞Cohen-Grossberg神经网络模型^[2]、Cohen-Grossberg神经网络模型鲁棒稳定性^[3]、带随机项Cohen-Grossberg神经网络模型的研究。而在2009年,由Arefeh Boroomand和Mohammad B.Menhaj提出了分数阶Hopfield神经网络模型^[4]:

$$F_i \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} = -\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(x_j) + I_i \quad (2)$$

式(2)中: $i = 1, 2, \dots, n$; $0 < \alpha < 1$; $\frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha}$ 为Caputo型分数阶导数。

自此,分数阶神经网络伴随着分数阶微积分理论、分数阶微分方程及其稳定性相关理论的日渐成熟,对分数阶神经网络的稳定性研究也日益丰富^[5-8]。而分数阶Cohen-Grossberg神经网络是分数阶Hopfield神经网络的一种推广,本文提出一类分数阶Cohen-Grossberg神经网络模型:

$$\frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha} = -a_i(x_i(t)) \left[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n c_{ij} d_j(x_j) \right], \quad (3)$$

进而讨论了该类型Cohen-Grossberg模型稳定性的充分条件。

1 预备知识

定义 1^[9]:给定 $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 的分数阶Caputo导数 $D^\alpha f(x)$ 定义为 $D^\alpha f(x) = J^{m-\alpha} f^{(m)}(x)$, 其中 $m = [\alpha] + 1$, $J^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt$, $\beta > 0$, 这里的 $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ -函数, 即 $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$ 。

性质 1: $D^\alpha C = 0$, 其中, C 为常数。

性质 2: $D^\alpha(\mu f(t) + \nu g(t)) = \mu D^\alpha f(t) + \nu D^\alpha g(t)$, 这里, μ, ν 为常数。

定义 2^[10]: Mittag-Leffler 函数 $E_\alpha(z)$ 和双参数形式的 Mittag-Leffler 函数分别定义为:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C};$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}。$$

从定义易得, $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$, 并且 $E_{1,1}(z) = e^z$ 。

考虑一般的分数阶系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(t, x(t)), & 0 < \alpha < 1。 \\ x(t_0) = x_{t_0} \end{cases} \quad (4)$$

定义 3^[11]: 若 $\bar{x} = 0$ 是系统的平衡点, 且 $\|x(t)\| \leq [m(x_{t_0}) E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)]^b$, 其中 $\lambda > 0, b > 0, m(0) = 0, m(x) \geq 0, |m(x_2) - m(x_1)| \leq m_0 |x_2 - x_1|$, 则称系统的解是 Mittag-Leffler 稳定的。

引理 1^[12]: 若 $x(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的连续可微函数, 则

收稿日期: 2018-12-24; 修回日期: 2019-01-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11802388)

作者简介: 刘孝磊 (1983-), 男, 副教授, 硕士。

$$D^\alpha |x(t)| \leq \text{sgn}(x(t)) D^\alpha x(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5)$$

在 $[0, +\infty)$ 几乎处处成立。

引理 2^[13]: 若 $V(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 且满足 $D^\alpha V(t) \leq \theta V(t)$, $0 < \alpha < 1$, θ 为常数, 则 $V(t) \leq V(0)E_\alpha(\theta t^\alpha)$, $t \geq 0$ 。

2 主要结果

给出如下形式的分数阶 Cohen-Grossberg 神经网络模型:

$$D^\alpha x(t) = -A(x(t))[B(x(t)) - CF(x)], \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

式(6)中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示神经元状态变量; $A(x(t)) = \text{diag}[a_1(x_1), a_2(x_2), \dots, a_n(x_n)]^T$ 表示放大函数; $B(x(t)) = [b_1(x_1), b_2(x_2), \dots, b_n(x_n)]^T$ 表示放大函数; C 为神经元之间的互联矩阵; $F(x) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)]^T$ 为激活函数。

对于函数 $a_i(x_i)$ 、 $b_i(x_i)$ 、 $f_i(x_i)$ 做如下假设。

H1: 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$0 < \alpha_i^m \leq a_i(x_i) \leq \alpha_i^M; \quad (7)$$

$$0 < \beta_i^m \leq \frac{b_i(x_i)}{x_i} < +\infty. \quad (8)$$

H2: 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, $f_i(x_i)$ 满足 Lipschitz 常数为 l_i 的 Lipschitz 条件。

H3: 存在 $\mu_i > 0$, 使得 $\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i > \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j^M |c_{ji}| l_i$ 。

定理: 若系统满足 H1、H2, 则 $x = 0$ 是系统的 Mittag-Leffler 稳定平衡点。

证明: 构造 Lyapunov 函数

$$V(t, x(t)) = \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i(t)|, \quad (9)$$

由分数阶导数的性质、引理 1 及假设 H1、H2、H3 得:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t, x(t)) &= D^\alpha \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i(t)| = \sum_{i=1}^n \mu_i D^\alpha |x_i(t)| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i(t)) \mu_i D^\alpha x_i(t) = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i(t)) \mu_i \left(-a_i(x_i(t)) \left(b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(x_j(t)) \right) \right) \leq \\ &\sum_{i=1}^n \mu_i \left(a_i(x_i(t)) \left(-\text{sgn}(x_i(t)) \beta_i^m x_i(t) + \text{sgn}(x_i(t)) \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(x_j(t)) \right) \right) \leq \\ &\sum_{i=1}^n \mu_i \left(a_i(x_i(t)) \left(-\beta_i^m |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |c_{ij}| l_j |x_j(t)| \right) \right) \leq \\ &\sum_{i=1}^n \mu_i \left(-\alpha_i^m \beta_i^m |x_i(t)| + \alpha_i^M \sum_{j=1}^n |c_{ij}| l_j |x_j(t)| \right) = \sum_{i=1}^n -\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i |x_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \alpha_i^M |c_{ij}| l_j |x_j(t)| = \\ &\sum_{i=1}^n -\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i |x_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j^M |c_{ji}| l_i |x_i(t)| = \sum_{i=1}^n \left(-\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j^M |c_{ji}| l_i \right) |x_i(t)|. \end{aligned}$$

令 $\lambda = \min_i \left\{ \left(\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i - \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j^M |c_{ji}| l_i \right) / \mu_i \right\}$, 则由假

设 H3 及上式得, $\lambda > 0$, 且

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t, x(t)) &\leq \\ &\sum_{i=1}^n \left(\left(-\alpha_i^m \beta_i^m \mu_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \alpha_j^M |c_{ji}| l_i \right) / \mu_i \right) \mu_i |x_i(t)| \leq \\ &-\lambda \sum_{i=1}^n \mu_i |x_i(t)| = -\lambda V(t, x(t)). \quad (10) \end{aligned}$$

所以由引理 2 可得,

$$V(t) \leq V(0)E_\alpha(-\lambda t^\alpha), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

故则 $x = 0$ 是系统的 Mittag-Leffler 稳定平衡点。

3 实例仿真

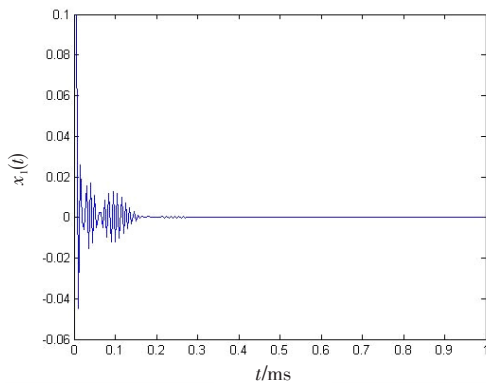
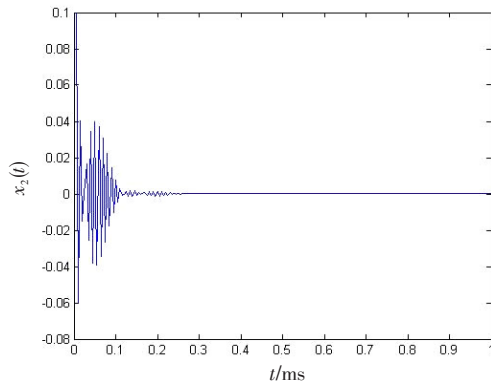
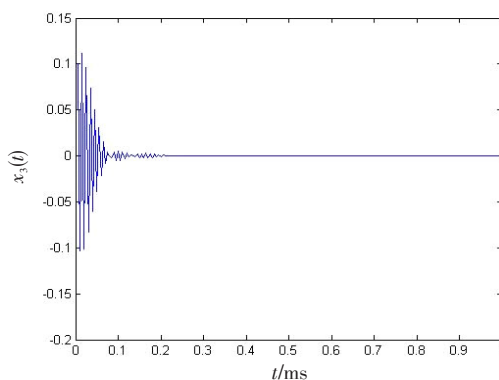
为系统选取参数:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.4, \\ A(x) &= \text{diag}(\cos x_1 + 3, \sin x_2 + 2, \cos 2x_3 + 2), \\ B(x) &= [\tanh 3x_1, \tanh 5x_2, \tanh 4x_3]^T, \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.6 \\ 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

选取 $F(x) = \frac{1}{\pi} [\arctan x_1, \arctan x_2, \arctan x_3]^T$, 则系统满足定理条件。因此, 该系统的平衡点 $x = 0$ 是 Mittag-Leffler 稳定的。

图 1~3 分别为 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 随时间 t 收敛于 0 的曲线图。

由仿真结果可以看出, 系统的状态曲线明显收敛于稳定平衡点 $x = 0$ 。

图1 $x_1(t)$ 的状态曲线图Fig.1 State curve of $x_1(t)$ 图2 $x_2(t)$ 的状态曲线图Fig.2 State curve of $x_2(t)$ 图3 $x_3(t)$ 的状态曲线图Fig.3 State curve of $x_3(t)$

4 结论

本文首先通过对分数阶Cohen-Grossberg神经网络的分析,给出了判定该类系统Mittag-Leffler稳定的充分性条件,并进行了Matlab仿真,通过具体实例验证了文中给出定理的正确性。

参考文献:

- [1] COHEN M, GROSSBERG S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1983, 13(5): 815-826.
- [2] ZHANG H G, JI C. Delay-independent globally asymptotic stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. International Journal of Information and Systems Sciences, 2005, 1(3-4): 221-228.
- [3] JI C, ZHANG H G, Wei Y. LMI approach for global robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with multiple delays[J]. Neurocomputing, 2008, 71(4-6): 475-485.
- [4] AREFEH B, MOHAMMAD B M. Fractional-order hopfield neural networks[C]//International Conference on Advances in Neuro-information Processing. Berlin: Springer, 2009: 883-890.
- [5] ZOU T, QU J F, CHEN L P, et al. Stability analysis of a class of fractional-order neural networks[J]. Indonesian Journal of Electrical Engineering, 2014, 12(2): 1086-1093.
- [6] ABDULAZIZ ALOFI, CAO J D, AHMED ELAIW, et al. Delay-dependent stability criterion of caputo fractional neural networks with distributed delay[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2014, 2014: 1-6.
- [7] 孙校书, 刘孝磊, 盖明久. 一类分数阶BAM神经网络的Mittag-Leffler稳定性[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2016, 33(6): 54-57.
SUN XIAOSHU, LIU XIAOLEI, GAI MINGJIU. Mittag-Leffler stability analysis of a class of fraction-order BAM neural networks[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2016, 33(6): 54-57. (in Chinese)
- [8] 刘孝磊, 周刚, 赵文飞. 分数阶BAM神经网络的鲁棒稳定性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2015, 32(6): 728-734.
LIU XIAOLEI, ZHOU GANG, ZHAO WENFEI. The robust stability of fraction-order BAM neural networks[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2015, 32(6): 728-734. (in Chinese)
- [9] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999: 198-224.
- [10] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations

- [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006: 154-166.
- [11] LI Y, CHEN Y, PODLUBNY I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. Computers & Mathematics with Applications. 2010, 59(5): 1810-1821.
- [12] ZHANG S, YU Y G, HU W. Robust stability analysis of fractional-order Hopfield neural networks with parameter uncertainties[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014: 1-14.
- [13] CHEN J J, ZENG Z G, JIANG P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. Neural Networks, 2014(51): 1-8.
- [14] W CHEN, G PANG. A new definition of fractional Laplacian with application to modeling three-dimensional nonlocal heat conduction[J]. Journal of Computational Physics, 2016(309): 350-367.
- [15] DENG W H, LI C P, LU J H. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time-delays [J]. Nonlinear Dynamic, 2007(48): 409-416.
- [16] LIANG YINGJIE, CHEN WEN, RICHARD L. Connecting complexity with spectral entropy using the Laplace transformed solution to the fractional diffusion equation [J]. Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications, 2016(453): 327-335.

Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Cohen-Grossberg Neural Networks

LIU Xiaolei¹, GU Lijuan¹, LIU Xiaoyan¹, GUO Lina²

(1. Naval Aviation University, Yantai Shandong 264001, China; 2. Nanshan College, Yantai Shandong 265706, China)

Abstract: On the basis of the integer order Cohen-Grossberg neural networks and fractional order Hopfield neural networks, the fractional order Cohen-Grossberg neural networks were given. In order to research this type neural networks, Mittag-Leffler function was brought, and making use of the property of the Mittag-Leffler function and fractional order derivative, the Mittag-Leffler stability of fractional order Cohen-Grossberg neural networks was investigated by constructing Lyapunov function, and a sufficient condition was gotten. At last, the correctness of the conclusion was verified by an emulating example.

Key words: fractional order; CG neural networks; Mittag-Leffler stability

简讯:

航空基础学院组织学员参加山东省大学生物理竞赛获佳绩

近日,山东省第十届大学生科技节——大学生物理竞赛(第二届)结果公布。本届竞赛,我校航空基础学院领导大力支持理化教研室全体教员精心组织和认真辅导,选派参赛的115名学员中,36名学员获得一等奖,39名学员获得二等奖,19名学员获得三等奖。竞赛成绩在省内各高校中名列前茅,获奖比例为82%,远高于全省平均获奖比例45%。

山东省大学生物理竞赛是由山东教育厅、山东省科协和山东省物理学会等联合组织的,其目的在于推动物理教育教学改革,着力培养大学生的创新精神和理论联系实际的能力,激发学习热情,促进高校形成良好学习风气。本届竞赛由山东科技大学承办,共有来自包括山东大学、中国科技大学、中国石油大学、鲁东大学、海军潜艇学院等34所省内军地院校的8000余名大学生参加。