

文章编号:1673-1522(2020)04-0345-04

DOI: 10.7682/j.issn.1673-1522.2020.04.010

杨氏双缝干涉光程差近似计算的弱化条件分析

张 勇¹, 牟朝霞², 刘存海², 柳 叶²

(1. 山西农业大学信息学院, 山西 晋中 030800; 2. 海军航空大学, 山东 烟台 264001)

摘 要:利用平面几何勾股定理,推导出杨氏双缝干涉实验光程差的准确表达式,对光程差表达式进行同解变换,反演了明纹中心坐标与光程差的函数关系,并对明纹中心坐标表达式进行了分析讨论,给出了数值解,得出了5点结论。结论表明,杨氏双缝干涉实验光程差近似计算的条件可弱化为光程差远小于双缝间距,且利用经典近似方法计算明纹中心坐标在干涉级次较大时误差较大。

关键词:杨氏双缝干涉;光程差;条纹位置

中图分类号:O436.1

文献标志码:A

杨氏双缝干涉实验是光具有波动性的重要例证,也是大学物理课程中波动光学部分的重要内容^[1-2]。几乎所有的工科院校大学物理教材中,都利用该实验阐述光的分波阵面干涉理论。文献[3-6]几乎采用同样的近似方法得出两束相干光的光程差。如图1所示,各物理量含义如下^[7-8]: a 、 b 代表两束光的光程; D 代表观察屏与双缝间垂直距离; d 代表双缝间距; x 代表观察屏 P 点坐标,则 $\delta=b-a$ 为:

$$x = \pm \frac{D}{d} \delta \quad (1)$$

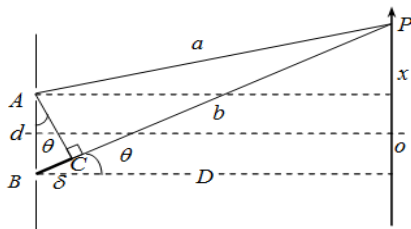


图1 杨氏双缝干涉实验

Fig.1 Young's double-slit interference experiment

该类方法中一般采用了以下3个近似条件^[9-13]:

- 1) 当 $D \gg d$ 时, $\delta \approx \overline{BC} = d \sin \theta$;
- 2) θ 很小, $\tan \theta \approx \sin \theta$;
- 3) $x \gg d$, $\tan \theta = \frac{x + d/2}{D} \approx x/D$ 。

条件1满足远场干涉条件,条件2满足近轴干涉条件;条件2、3在对近轴干涉讨论时存在矛盾,导致当 $x=0$ 时, $\theta \neq 0$,有 $\delta \approx d \sin \theta \neq 0$,与式(1)矛盾。

文献[14-17]对光程差计算的近似条件进行了讨论,给出了代数法计算光程差的公式,对公式进行泰

勒级数展开,忽略二阶小量同样得到式(1)的结论,近似条件仍为 $D \gg d$ 且 $x \gg d$ 。以上各种方法在光程差推导上都使用了近似,区别在于近似的时机不同,近似的精度不同,但近似的落脚点都是如何用条纹中心坐标 x 的多项式来表示光程差。而在具体实验中,两束光干涉产生明条纹或暗条纹的光程差由干涉理论唯一确定。即光程差满足半波长偶数倍时,干涉加强,呈明条纹;光程差满足半波长奇数倍时,干涉减弱,呈暗条纹。实验中并不关心光程差具体是多少,更关心的是在光程差取入射光半波长的某一整数倍时,条纹中心坐标 x 的具体数值。所以,关键不在于计算光程差,而在于对确定的干涉级次(即光程差确定)准确计算条纹中心坐标,考察条纹分布图样、条纹中心坐标理论值与实验值的偏差。

1 杨氏双缝干涉条纹中心坐标表达式的推导

如图1所示,由平面几何勾股定理可知:

$$b^2 = D^2 + (x + \frac{d}{2})^2, \quad a^2 = D^2 + (x - \frac{d}{2})^2,$$

$$\delta = b - a = \sqrt{D^2 + (x + \frac{d}{2})^2} - \sqrt{D^2 + (x - \frac{d}{2})^2} \quad (2)$$

式(2)即为两束光在 P 点相遇光程差的表达式。该式在计算过程中未进行任何条件近似和修约,是两束光在 P 点光程差的准确表达式。式(2)中若满足 $D \gg d$ 且 $x \gg d$,利用泰勒展开忽略平方项二次小量^[18]化简可退化为式(1)。

对式(2)进行移项平方并进行同解变换,得:

收稿日期:2020-05-23; 修回日期:2020-07-22

基金项目:山西省高等学校教学改革创新项目(J2020456)

作者简介:张 勇(1973-),男,副教授,硕士。

$$x = \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{D^2\delta^2}{d^2 - \delta^2}} \quad (3)$$

式(3)为干涉条纹中心坐标方程,也就是给定光程差所对应的干涉条纹中心坐标位置。对比式(1)和式(3),显然,只要 $d > 10\delta$ 时,式(3)可退化为式(1)。即杨氏双缝干涉光程差的近似计算不再须要满足文献[9-13]中所述的 $D \gg d$ 、 $x \gg d$ 和 θ 很小的多个条件,只需满足相对弱化的条件 $d \gg \delta$ 即可。实际计算中,因光程差 δ 常以入射光半波长的整数倍来计量 ($\delta = k\lambda/2, k=0,1,2,\dots$),当入射光波长已知时,上述近似条件可以进一步转化为条纹级数 $d/\lambda \gg k$ 。

2 杨氏双缝干涉条纹中心坐标表达式讨论

物理学上,远远大于符号一般要求2个物理量之间相差20~100倍。实验室常用杨氏干涉光学器件一般屏距 $D > 1\text{m}$,狭缝间距在 10^{-1}mm 量级,满足 $D \gg d$,但可观察的条纹线宽范围一般 $2x < 10\text{mm}$,并不一定满足 $x \gg d$,只近似满足 $\theta \approx 0$ 。文献[18]讨论了 $\tan \theta \approx \sin \theta$ 满足的条件是 $\theta < 5^\circ$ 。即文献[9-13]中3个近似条件不可能同时满足,经由3个近似条件得出的光程差式(1)正确性值得商榷。

由式(3)可得:

结论1:当 $\delta = 0$ 时, $x = 0$,即中央明纹,与式(1)结论相同。

结论2:对于同一光程差 δ ,同级条纹对称分布在中央明纹两侧,且2个同级条纹到中央明纹距离相等,与式(1)结论相同。

式(3)中,由图1所示几何关系,很明显 $d > a - b = \delta$ 恒成立,对于确定的光程差,利用式(1)和式(3),分别取坐标为 x_1 和 x_3 ,计算2种方法得出的条纹中心坐标平方差值为:

$$x_3^2 - x_1^2 = \frac{\delta^2}{4} + \frac{D^2\delta^2}{d^2 - \delta^2} - \frac{D^2\delta^2}{d^2} = \frac{D^2\delta^4}{d^2(d^2 - \delta^2)} + \frac{\delta^2}{4} > 0 \quad (4)$$

结论3:式(4)表明,当 $\delta \neq 0$,即非中央明纹条件下,用式(3)计算的条纹中心坐标恒大于式(1)计算的坐标值,即实际条纹中心比式(1)计算结果靠外侧。

考察干涉加强位置(明纹),用 $\delta = k\lambda$ 代入式(3)并对 k 求导,得:

$$x = \sqrt{\frac{k^2\lambda^2}{4} + \frac{D^2k^2\lambda^2}{d^2 - k^2\lambda^2}}, \quad \frac{dx}{dk} = \frac{k}{x} \cdot \left[\frac{\lambda^2}{4} + \left(\frac{Dd\lambda}{d^2 - k^2\lambda^2} \right)^2 \right] \quad (5)$$

结论4:由式(5)可知,干涉条纹不等间距,将 $\delta = (2k - 1)\lambda/2$ 代入,同样可求得暗纹间距表达式,干涉暗纹间距亦不等。随着 x 坐标增大,条纹间距变宽,且同级明纹间距大于暗纹间距。当干涉级次 k 越大,即 x 偏离主轴线越远,光程差 δ 越大,在近似条件 $d \gg \lambda$ 时,式(5)可退化为 $dx/dk = D\lambda/d$,符合经典算法中杨氏干涉条纹间距公式,可认为条纹间距相等。

式(1)和式(3)表述的条纹中心坐标相对误差记为:

$$f(\delta) = \frac{x_3 - x_1}{x_1} = \sqrt{\frac{d^2}{4D^2} + \frac{d^2}{d^2 - \delta^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{d^2}{4D^2} + \frac{\delta^2}{d^2 - \delta^2}} - 1 \quad (6)$$

式(6)利用泰勒展开,当 $D \gg d, d \gg \delta$ 时,即满足远场干涉条件时,忽略二级小量,可得其相对误差近似计算结果 $f'(\delta)$:

$$f'(\delta) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{4D^2} + \frac{\delta^2}{d^2 - \delta^2} \right) \quad (7)$$

结论5:式(7)表明,当 $d \gg \delta$ 时, $d^2 - \delta^2 \approx d^2$,利用式(1)和式(3)计算条纹中心坐标相对误差与光程差 δ^2 成一次函数关系,曲线斜率近似为 $1/d^2$ 。即光程差越大,误差值越大。

取文献[3]中例2所列数据: $D = 1\text{m}, d = 0.2\text{mm}, \lambda = 500\text{nm}$,取 $\delta = k\lambda, k$ 为干涉明纹级次。依据式(1)和式(3)分别计算不同级别明纹坐标 x_1 和 x_3 ,利用式(6)计算其明纹坐标相对误差 $f(\delta)$,结果见表1。

由表1可见,前23级明纹似式(1)和准确式(3)计算结果误差发生在 0.01mm 位,相对误差小于 0.2% ; 24~50级明纹近似式(1)和准确式(3)计算结果误差发生在 0.1mm 位,相对误差小于 0.8% ;继续计算可得在干涉级次在51~100级时,式(1)和式(3)计算结果发生在 1mm 位,相对误差不超过 3.5% 。

表1 干涉明纹坐标2种计算方法对比

Tab.1 Comparison of two methods for calculating the coordinate of interference fringe

k	x_1/mm	x_3/mm	$f(\delta)/\%$	k	x_1/mm	x_3/mm	$f(\delta)/\%$
1	2.5	2.500	0.000	26	65.0	65.138	0.212
2	5.0	5.000	0.001	27	67.5	67.654	0.229
3	7.5	7.500	0.003	28	70.0	70.172	0.246
4	10.0	10.001	0.005	29	72.5	72.691	0.264
5	12.5	12.501	0.008	30	75.0	75.212	0.282
6	15.0	15.002	0.011	31	77.5	77.734	0.302
7	17.5	17.503	0.015	32	80.0	80.257	0.322

续表 1

k	x_1/mm	x_2/mm	$f(\delta)/\%$	k	x_1/mm	x_2/mm	$f(\delta)/\%$
8	20.0	20.004	0.020	33	82.5	82.782	0.342
9	22.5	22.506	0.025	34	85.0	85.309	0.363
10	25.0	25.008	0.031	35	87.5	87.837	0.385
11	27.5	27.510	0.038	36	90.0	90.367	0.407
12	30.0	30.014	0.045	37	92.5	92.898	0.431
13	32.5	32.517	0.053	38	95.0	95.432	0.454
14	35.0	35.021	0.061	39	97.5	97.967	0.479
15	37.5	37.526	0.070	40	100.0	100.504	0.504
16	40.0	40.032	0.080	41	102.5	103.043	0.529
17	42.5	42.538	0.090	42	105.0	105.584	0.556
18	45.0	45.046	0.101	43	107.5	108.127	0.583
19	47.5	47.554	0.113	44	110.0	110.672	0.611
20	50.0	50.063	0.125	45	112.5	113.219	0.639
21	52.5	52.573	0.138	46	115.0	115.768	0.668
22	55.0	55.083	0.152	47	117.5	118.320	0.698
23	57.5	57.595	0.166	48	120.0	120.873	0.728
24	60.0	60.108	0.180	49	122.5	123.430	0.759
25	62.5	62.622	0.196	50	125.0	125.988	0.791

3 结论

上述推导过程中,光程差并未做修约或近似。采用数学方法将光程差与坐标之间的变换式反演,解得坐标 x 与光程差的准确表达式。从式(3)可以看出,条纹中心坐标近似并不需要 $D \gg d$ 和 $x \gg d$ 的条件,只需满足相对弱化的条件 $d \gg \delta$ 即可。当 k 值较小时,杨氏双缝干涉准确坐标条纹分布和条纹间距与文献[3-6]中的近似算法结果一致;但在条纹级次 k 较大时,条纹间距不能再认为是相等,且随着 k 的增大,准确计算与近似计算误差以 k^2 的速率增长。

参考文献:

[1] 严蕊铃,宋恭渝,徐宇锋,等.光的干涉教学设计[J].物理通报,2019(S1):86-90.
YAN RUILING, SONG GONGYU, XU YUFENG, et al. Instructional design of light interference[J]. Physical Bulletin, 2019(S1): 86-90. (in Chinese)

[2] 黄佳雯,胡志娟,何雨媛,等.杨氏双缝干涉实验的若干教学难点探究[J].物理通报,2019(S1):100-102,105.
HUANG JIAWEN, HU ZHIJUAN, HE YUYUAN, et al. Exploration of some teaching difficulties in Young's double slit interference experiment[J]. Physics Bulletin, 2019(S1): 100-102, 105. (in Chinese)

[3] 马文蔚,解希顺,周雨青.物理学[M].北京:高等教育出版社,2020:98-100.
MA WENWEI, XIE XISHUN, ZHOU YUQING. Physics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2020: 98-100. (in

Chinese)

[4] 余虹.大学物理学[M].北京:科学出版社,2017:280-281.
YU HONG. College physics[M]. Beijing: Science Press, 2017:280-281. (in Chinese)

[5] 姚启钧.光学教程[M].北京:高等教育出版社,2005:33-34.
YAO QIJUN. Optical course[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 33-34. (in Chinese)

[6] 哈里德,瑞斯尼克,汉克.物理学基础[M].北京:机械工业出版社,2013:919.
HALLIDAY, RESNICK, WALKER. Fundamentals of physics[M]. Beijing: China Machine Press, 2013: 919. (in Chinese)

[7] 马峰全,梅策香.双缝干涉实验探讨光波的相干性[J].咸阳师范学院学报,2018,33(4):44-46.
MA FENGQUAN, MEI CEXIANG. A discussion of the optical coherence through Young's double slit interference experiment[J]. Journal of Xianyang Normal University, 2018, 33(4): 44-46. (in Chinese)

[8] 陈子阳,李浩然,蒲继雄.杨氏双缝干涉实验中双缝缝宽的讨论[J].大学物理实验,2019,32(6):43-46,62.
CHEN ZIYANG, LI HAORAN, PU JIXIONG. Discussion of the width of slits in Young's double slit interference experiment[J]. Physical Experiment of College, 2019, 32(6): 43-46, 62.

[9] 李栋玉,时有明,张廷宪.杨氏双缝干涉实验的条纹分布研究[J].实验技术与管理,2019,36(10):120-122,

- 126.
- LI DONGYU, SHI YOUMING, ZHANG TINGXIAN. Study on fringe distribution of Young's double slit interference experiment[J]. *Experimental Technology and Management*, 2019, 36(10): 120-122, 126. (in Chinese)
- [10] 王高亮, 孟明, 王强. 基于 Mathematica 的杨氏双缝干涉实验仿真[J]. *周口师范学院学报*, 2018, 35(5): 42-44.
- WANG GAOLIANG, MENG MING, WANG QIANG. The simulation of Young's double slit experiment based on Mathematica[J]. *Journal of Zhoukou Normal University*, 2018, 35(5): 42-44. (in Chinese)
- [11] 刘长菊, 丁豹, 谭玉彬, 等. 狭缝宽度对双缝后光场分布的影响[J]. *物理与工程*, 2018, 28(6): 100-106.
- LIU CHANGJU, DING BAO, TAN YUBIN, et al. The influence of slit width on light superposition through double-slit studied by matlab[J]. *Physics and Engineering*, 2018, 28(6): 100-106. (in Chinese)
- [12] 苏皖娥. 杨氏双缝干涉实验的影响因素研究[J]. *赤峰学院学报: 自然科学版*, 2017, 33(4): 6-8.
- SU WANE. Study of influencing factors of Young's double slit experiment[J]. *Journal of Chifeng University: Natural Science*, 2017, 33(4): 6-8. (in Chinese)
- [13] 刘玉颖, 金仲辉. 关于美国哈里德教材《物理学基础》中几个问题的商榷[J]. *物理通报*, 2015(4): 109-112.
- LIU YUYING, JIN ZHONGHUI. The discussion about some questions in fundamentals of physics by Darvid Haliday[J]. *Physical Bulletin*, 2015(4): 109-112. (in Chinese)
- [14] 胡晓颖, 荆丽丽, 葛俊峰. 杨氏双缝干涉问题浅析[J]. *科技创新导报*, 2019, 16(33): 239, 241.
- HU XIAOYING, JING LILI, GE JUNFENG. Analysis of Young's double slit interference problem[J]. *Science and Technology Innovation Herald*, 2019, 16(33): 239, 241. (in Chinese)
- [15] 张登玉, 胡丽兴, 高峰, 等. 杨氏双缝干涉实验中的光程差[J]. *广西物理*, 2008, 29(3): 43-46.
- ZHANG DENGYU, HU LIXING, GAO FENG, et al. Optical path difference in Young's double slit interference experiment[J]. *Guangxi Physics*, 2008, 29(3): 43-46. (in Chinese)
- [16] 王平, 王玉琢, 于晓平. 杨氏干涉实验中关于近似光程差的研究[J]. *山东师范大学学报: 自然科学版*, 2001, 16(4): 465-466.
- WANG PING, WANG YUZHUO, YU XIAOPING. Study on approximate optical path difference in Young's double slit interference experiment[J]. *Journal of Shandong Normal University: Natural Science*, 2001, 16(4): 465-466. (in Chinese)
- [17] 李莉. 光程差计算中的近似问题[J]. *大学物理*, 2002, 21(4): 18-19.
- LI LI. Approximation problems in the optical path difference calculation[J]. *College Physics*, 2002, 21(4): 18-19. (in Chinese)
- [18] 李磊, 梁吉峰. 杨氏双缝干涉条纹间距到底是不是相等的[J]. *物理教师*, 2008, 29(11): 27-28.
- LILEI, LIANG JIFENG. Are the slit interference stripes equally spaced[J]. *Physics Teacher*, 2008, 29(11): 27-28. (in Chinese)

Analysis of Weakening Condition for Approximate Calculation of Optical Path Difference in Young's Double Slit Interference

ZHANG Yong¹, MU Zhaoxia², LIU Cunhai², LIU Ye²

(1. Colledge of Information, Shanxi Agricultural University, Jinzhong Shanxi 030800, China;

2. Naval Aviation University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: Based on the Pythagorean theorem of plane geometry, the exact expression of the optical path difference of Young's double slit interference is derived, and the expression of the optical path difference is transformed with the same solution, and the functional relationship between the center coordinates of the fringe and the optical path difference is inverted. The expression of the center coordinate of the fringe is analyzed and discussed, the numerical solution is given, and five conclusions are obtained. The results show that the condition for approximately calculating of the Young's double slit interference can be weakened as that the optical path difference is much less than the distance between two slits, and the error of calculating the center coordinate of the fringe is greater when the interference order is larger by using the classical approximate method.

Key words: Young's double slit interference; optical path difference; fringe position